Geometri i AdS/CFT-korrespondencen

Af

THOMAS OLSEN

Thomas Olsen har afsluttet sit speciale i AdS/CFT-korrespondencen, der kan findes på `www.fys.ku.dk/~tolsen/spinning.pdf`*. Han starter til april på en PhD i teoretisk faststoffysik på DTU, tilknyttet centeret CINF for at forske i en ny katalyseteknologi kaldet HEFatS (Hot Electron Femtochemistry at Surfaces). E-mail: tolsen@fys.ku.dk*

Resumé

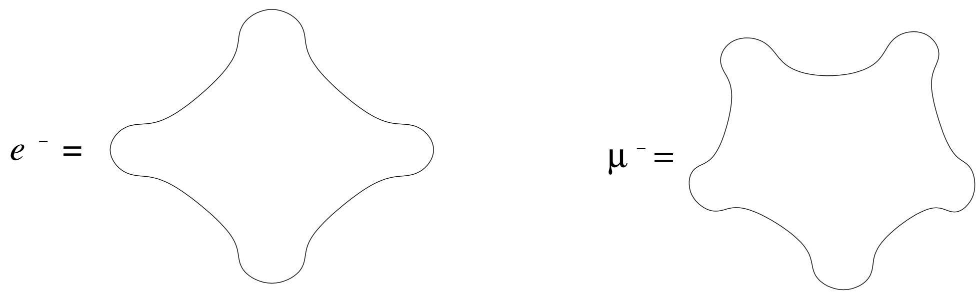
Udgør vores velkendte 4-dimensionale Minkowski-rum overfladen af et særlig 10-dimensionalt rum, hvor fysikken er styret af strenge?

Introduktion

Kort tid efter David Gross sammen med Politzer og Wilczek havde fået tildelt nobelprisen i fysik for beskrivelsen af asymptotisk frihed i den stærke kernekraft, holdt han et foredrag på KU med titlen "The future of physics"(se interview i Gamma 138). Her fremsatte han sit bud på de 25 mest presserende spørgsmål i fysikken i dag og denne artikel vil relaterer sig til det tiende af disse som kort og godt lyder: "The Nature of String Theory - What is it ... "

Den korte historie om strenge!

Strengteori kom frem i slutningen af 1960erne som en model for den stærke kernekraft. Man var dengang begejstret over at beregnede amplituder for spredning af strenge matchede de eksperimentelt observerede



Figur 1: Streng i to forskellige excitationstilstande. Jo højere en streng er exciteret, jo mere energi har den. En observatør der måler på afstande der er meget større end strenglængden, vil beskrive strenge i forskellige excitationstilstande som partikler med forskellige masser. På denne måde tænkes strengteori at kunne gøre rede for alle de dimensionsløse parametre man kender fra eksperimenter. For eksempel forholdet mellem elektronens og muonens masser.

for visse mesoner. Dog havde strengteori også flere uheldige egenskaber og da den meget succesfulde kvantekromodynamik (QCD) vandt frem i starten af halvfjerserne gik man snart bort fra strengbeskrivelsen af den stærke kernekraft.

Det viste sig imidlertid at strengteori havde andre egenskaber der gjorde teorien til en seriøs kandidat til en forenende teori for alting - inklusiv tyngdekraften. Teorien indeholder nemlig en masseløs spin 2 partikel - Gravitonen - som præcis er hvad man forventer i en kvantemekanisk beskrivelse af tyngdekraften. En anden af teoriens attraktive egenskaber er at den ikke har nogle dimensionsløse parametre. Alle partiklers masse kan beregnes i teorien og styrken med hvilken strenge vekselvirker med hinanden (koblingskonstanten g_s) er dynamisk bestemt. Energiskalaen i teorien sættes den typiske strenglængde l_s[1] som er af størrelsesorden som plancklængden ($\sim 10^{-35}$ m). Den simple ide om strenge som de fundamentale objekter der giver anledning til alle partikler er forsøgt skitseret i figur 1. Detaljerne har dog vist sig at være overordentlig svære at fitte præcist med den eksperimentelt observerede fysik og mange betragter i dag opgaven som forfejlet.

Et af de mest kendte og mærkværdige egenskaber ved strengteori er at teorien kun er konsistent i 10 rumtids dimensioner. Pessimisten vil med det samme hævde at dette diskvalificerer teorien som en beskrivelse af

[1]Af historiske årsager benytter man oftes kvadratet på denne: $\alpha' = l_s^2$.

den fysik vi observerer, hvorimod optimisten vil advokere for at dette netop understøtter det fundamentale ved teorien. Det representerer nemlig en forudsigelse af rummets karakter som ingen anden teori har kunne levere. Desuden kan man nemt forestille sig at 6 af de rumlige dimensioner er kompaktifiseret så de ikke er umiddelbart tilgængelige for os. Som eksempel kan man betragte en to-dimensionel cylinderoverflade: Observatører der måler fysik på cylinderoverfladen ved længder meget større en cylinderens radius kan blive narret til at tro cylinderen er en-dimensional.

I 1985 blev det klart at der kun var 5 forskellige distinkte strengteorier der er matematisk konsistente og i 1995 blev det så vist at disse 5 teorier alle kommer ud som forskellige grænser af én unik teori i 11 dimensioner. Man kender stadig ikke rigtig naturen af denne teori og kalder den foreløbig bare M-teori.[2]

Endelig fremsatte fysikeren Maldacena i 1997 AdS/CFT-korrespondence [1] der postulerer at strengteori i et særlig krumt rum kaldet $AdS_5 \times S^5$ er ækvivalent med en bestemt kvantefeltteori i 4-dimensionalt Minkowski rum kaldet $\mathcal{N} = 4$ SYM. Da kvantefeltteori er den formulering man i dag bruger til at beskrive den kendte del af fysikken (som for eksempel QCD) har AdS/CFT-korrespondencen givet fornyet håb om en strengteoretisk formulering af den stærke vekselvirkning. Det er nemlig sådan at selvom QCD har haft stor succes med at beskrive højenergetiske spredningseksperimenter kan teorien stadig ikke bruges til kvantitative forudsigelser af lavenergetiske fænomener som for eksempel det faktum at kvarker ikke kan skilles ad.

En diskussion af AdS/CFT-korrespondence kan hurtig blive temmelig teknisk og kræver under alle omstændigheder kendskab til strengteori og kvantefeltteori (se [2] for et grundigt review), men jeg vil i det følgende prøve at gøre rede for et par af korrespondencens geometriske aspekter som burde kunne forstås uden disse forudsætninger. Det grundlæggende resultat er at feltteorien lever på overfladen af $AdS_5 \times S^5$ og de "indre" symmetrier i feltteorien er realiseret som rummets egen symmetri i strengteorien.

[2]Der har været forskellige bud på hvad dette M skulle stå for: Mother of all theories, Matrixteori eller "Membran"da det har været foreslået at de fundamentale objekter i teorien er to-dimensionale membraner.

1 Symmetrier i Feltteori

Som allerede nævnt er QCD en kvantefeltteori. Sådanne teorier er som regel defineret ved en virkning der angiver hvordan felterne vekselvirker med hinanden. Partikler forstås som excitationer af felterne når disse kvantiseres og virkningen kan bruges til at beregne matrixelementer såsom $\langle\phi_{ind}|\phi_{ud}\rangle$ der kan relateres til målte spredningsamplituder.

Som et simpelt eksempel kan man betragte feltteorien for et komplekst frit bosonfelt $\phi(x)$ i 4-dimensionalt Minkowski rum. Virkningen S er da givet ved

$$S(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) = \int d^4x \Big(\frac{1}{2}m^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi\Big), \tag{1}$$

hvor m er en parameter med enhed som masse, $\mu \in \{0,1,2,3\}$ og Einsteins summationskonvention er underforstået[3]. Virkningen kan ses som en felt-generalisering af virkningen for en partikel i et kvadratisk potential: $S(x(t), \dot{x}(t)) \sim \int dt(\frac{1}{2}\omega^2x^2 - \frac{1}{2}\dot{x}^2)$. Det første led i (1) svarer da til det potentielle led og andet led svarer til det kinetiske led.

I det følgende vil det ikke blive forklaret hvordan matrixelementer beregnes fra en given virkning. I stedet vil udtryk som (1) blot blive brugt til at analysere symmetrier i feltteori.

Poincarésymmetri

Det er vigtigt at forskellige observatører i den specialle relativitetsteori observerer de samme fysiske love. Dette sikres ved at gøre virkningen invariant overfor Lorentztransformationer og i (1) er Lorentzinvarians manifest i indexnotationen. Lorentztransformationer kan nemlig ses som de koordinattransformationer der lader formen $x_\mu x^\mu \equiv -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ invariant. Da de partielt afledede transformerer som vektorer, vil led af formen $\partial_\mu \ldots \partial^\mu \ldots$ ligeledes være Lorentzinvariante. Desuden er normen af Jacobideterminanten for Lorentz transformationer 1, så integralmålet

[3] Der summes over et repeteret løftet og sænket græsk index så $\partial_\mu\partial^\mu \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ og $x_0 = t$

er også invariant. Når en teori er invariant overfor en særlig type transformationer siges teorien at besidde en symmetri.

Ud over Lorentzsymmetri har virkningen (1) også translationssymmetri som reflekterer rumtidens homogenitet. Dette kan ses ved at transformationen $x_\mu \to x_\mu + a_\mu$ kan ophæves af en tilsvarende substitution i integralet. Den kombinerede Lorentz- og translationssymmetri kaldes Poincarésymmetri.

Gaugesymmetri

Virkningen (1) har en anden ummiddelbar symmetri. Nemlig transformation $\phi \to e^{i\alpha}\phi$ som siges at være *global* da α ikke afhænger af x. Ophøjer vi transformationen til at være *lokal* (altså $\alpha = \alpha(x)$) er det ikke længere en symmetri i teorien da man så har at

$$\partial_\mu \phi(x) \to \partial_\mu (e^{i\alpha(x)}\phi(x)) = e^{i\alpha(x)}\partial_\mu \phi(x) + i(\partial_\mu \alpha(x))\phi(x). \tag{2}$$

Hvis man kræver en sådan lokal fasesymmetri har man intet andet valg end at indføre et nyt felt med transformationsegenskaber der ophæver det ekstra led i (2). Erstatter man ∂_μ med $D_\mu \equiv \partial_\mu + iA_\mu$, hvor $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha(x)$ når $\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$ fås præcis at $D_\mu \phi(x) \to e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi(x)$ som ønsket.

Kravet om lokal fasesymmetri leder altså til en teori hvor feltet ϕ er koblet til feltet A_μ der transformerer som en vektor under Lorentztransformationer. Denne lokale symmetri kaldes *gaugesymmetri* og feltet A_μ kaldes et gaugefelt. Det er nu naturligt også at indføre et kinetisk led for A_μ og et Lorentz- og gaugeinvariant valg er $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ med $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Virkningen i denne gaugeteori er altså

$$S(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \int d^4x \Big(\frac{1}{2}m^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}(D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi)\Big) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3}$$

Sættes $\phi = 0$ står kun det sidste led tilbage og identificeres A_μ med det elektromagnetiske vektorpotentiale, er teorien klassisk ækvivalent med Maxwells ligninger uden kilder. Gaugeinvariansen $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha(x)$ er så et udtryk for at de *fysiske* felter er $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$[4] eller $F_{\mu\nu}$ om man vil. Under kvantisering giver feltet A_μ anledning til fotoner.

[4]Man har jo for eksempel at $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A} - \nabla\alpha)$ da rotationen af gradienten er 0.

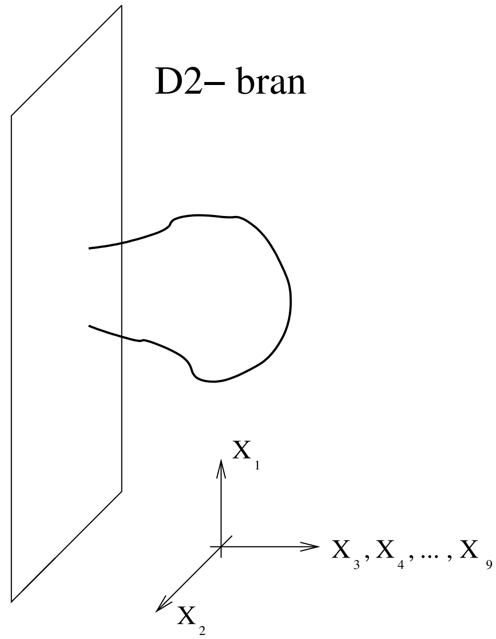
Erstattes bosonfeltet i (3) med et fermion felt fås kvanteelektrodynamikken (QED) der har leveret uhørt præcise forudsigelser om vekselvirkningerne mellem fotoner og elektroner. Der er altså noget der tyder på at kvantefeltteori og gaugesymmetri er en god ramme til beskrivelse af de fundamentale vekselvirkeninger.

Gaugesymmetrien der ganger en fasefaktor på bosonfeltet kaldes $U(1)$ i den gruppeteoretiske terminologi og kan udvides til en mere generel symmetri. Lader man ϕ være en N-dimensional complex vektor er en naturlig generalisering at betragte $U(N)$ transformationen $\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$. Hvis $e^{i\alpha(x)}$ skal være en $N \times N$ unitær matrix skal $\alpha(x)$ være en $N \times N$ hermitisk matrix. Man kan som før indføre et gaugefelt der opretholder den lokale symmetri, men transformationen bliver nu lidt mere kompliceret. På grund af matrixstrukturen kommuterer forskellige transformationer ikke og teorien siges at være ikke-abelsk[5]. Det kinetiske led bliver noget mere kompliceret hvilket blandt andet resulterer i at gaugefeltet nu også er koblet til sig selv. I ikke-abelske gaugeteorier kaldes gaugepartiklerne for gluoner og da en Hermitisk $N \times N$ matrix har N^2 uafhængige komponenter, er der N^2 gluoner i en $U(N)$ gaugeteori. Man kan altid vælge en basis af hermitiske matricer sådan så en af disse er identiteten og resten er sporløse. Da en af matricerne således kommuterer med resten svarer dens vekselvirkning til QED og resten udgør den egentlig ikke-abelske del som nu er $SU(N)$[6] med $(N^2 - 1)$ gluoner. QCD fås ved at vælge $N = 3$ (de berømte tre "farver"der har givet navn til teorien) og har således 8 gluonfelter.

Kravet om gaugesymmetri fører tilsyneladende til en god beskrivelse af naturen, men teorien kan ikke i sig selv give noget svar på hvorfor dette krav er så essentielt. I det følgende vil det kort blive skitseret hvordan strengteori ikke bare indeholder gaugeteori, men også giver en helt naturlig fortolkning af symmetriens geometriske fundament.

[5] Abelsk gruppe = gruppe hvor alle elementer kommuterer.

[6] Denne gruppe består af unitære transformationer med determinant en, hvilket følger af $Tr(\alpha) = 0 \Rightarrow det(e^{i\alpha}) = 1$



Figur 2: Dirichlet grænsebetingelser i X_1X_2 planen giver anledning til en D2-bran. Kræves Dirchlet grænsebetingelser i p-dimensioner fås en Dp-bran. På sådanne braner lever en feltteori med gaugesymmetri i $p+1$ rumtids dimensioner.

2 Braner og $\mathcal{N} = 4$ SYM

Man behøver ikke at vide en masse om M-teori for at indse at svaret på David Gross' spørgsmål om strenge ikke er helt trivielt. Det viser sig nemlig at selvom man starter med en teori hvor de fundamentale objekter er en-dimensionale strenge, ledes man efterhånden til at konkluderer at teorien også må indeholde en anden slags fler-dimensionale objekter kaldet "D-braner". D'et står for Dirichlet og disse braner kan forstås som de hyper-planer åbne strenge er bundet til hvis man kræver Dirichlet grænsebetingelser for disse (se figur 2).

Faktisk bliver branen til et dynamisk objekt i sig selv og analyserer man teorien nærmere, vil man finde at der lever en veldefineret feltteori i den rumtid der udgøres af branens rumlige dimensioner plus tiden. Denne feltteori minder om Maxwells elektromagnetisme og strengenes endepunkter er elektrisk ladede under felterne på branen. Forestiller vi os nu i stedet N sammenfaldende braner som antages at kunne skelnes fra hinanden, vil hver streng give anledning til N^2 forskellige tilstande og feltteorien på branen vil da være en ikke-abelsk gaugeteori med gaugegruppe $U(N)$.

Nu er det jo straks fristende at betragte N D3-braner og strenge bundet til disse. Hvis man forestillede sig at en observatør på branerne kun har adgang til branernes egne dimensioner vil personen nemlig se verden som havende 3 rumlige dimensioner plus tiden og fysikken vil her være styret af en ikke-abelsk gaugeteori i stil med QCD.

Desværre er teorien ikke præcis QCD, men en anden velkendt feltteori kaldet $\mathcal{N} = 4$ SYM[7]. Teorien er lidt speciel da det er den unikke feltteori i 4-dimensioner der besidder 4-fold (maximal) supersymmetri og den har desuden den særlige egenskab at den ikke kender til afstande[8]. Dette er først og fremmest en konsekvens af at virkningen ikke indeholder nogle masseled som det første led i (3) og der er derfor ingen naturlig energi eller afstand i teorien. Det samme kunne man forestille sig gør sig gældende i masseløs QCD, men her vil en afstandsafhængighed dukke op i gluonkoblingen når teorien renormeres. Dette er indeholdt i den asymptotiske frihed Gross, Politzer og Wilczek gjorde rede for i 1973: Ved store energier (små afstande) vekselvirker kvarker svagt.

$\mathcal{N} = 4$ SYM har mange sjove egenskaber, men her angives blot den bosoniske del af virkningen for at kommenterer på noget af teoriens symmetri:

$$S = \frac{1}{8\pi g_s} \int d^4x Tr\left\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\sum_{i=1}^{6} D_\mu\phi_i D^\mu\phi_i + \sum_{i,j=1}^{6} [\phi_i, \phi_j][\phi_i, \phi_j]\right\}, \quad (4)$$

hvor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \qquad D_\mu\phi_i = \partial_\mu\phi_i + [A_\mu, \phi_i], \quad (5)$$

g_s er strengkoblingen, A_μ og ϕ_i er representeret ved hermitiske $N \times N$ matricer og Tr står for "Trace"(sporet). Notationen viser explicit invarians over for $SO(6)$ transformationer på samme måde som det blev forklaret for Lorentztransformationer ovenfor. Sådanne transformationer kan nemlig ses som norm-bevarende transformationer af 6-dimensionale reelle koordinat vektorer så hvis A er en $SO(6)$ matrix er $A^T = A^{-1}$

[7] SYM = Super Yang-Mills teori = supersymmetrisk ikke-abelsk gaugeteori.

[8] Lidt mere generelt er teorien invariant under konforme (vinkelbevarende) transformationer (CFT = Conformal Field Theory).

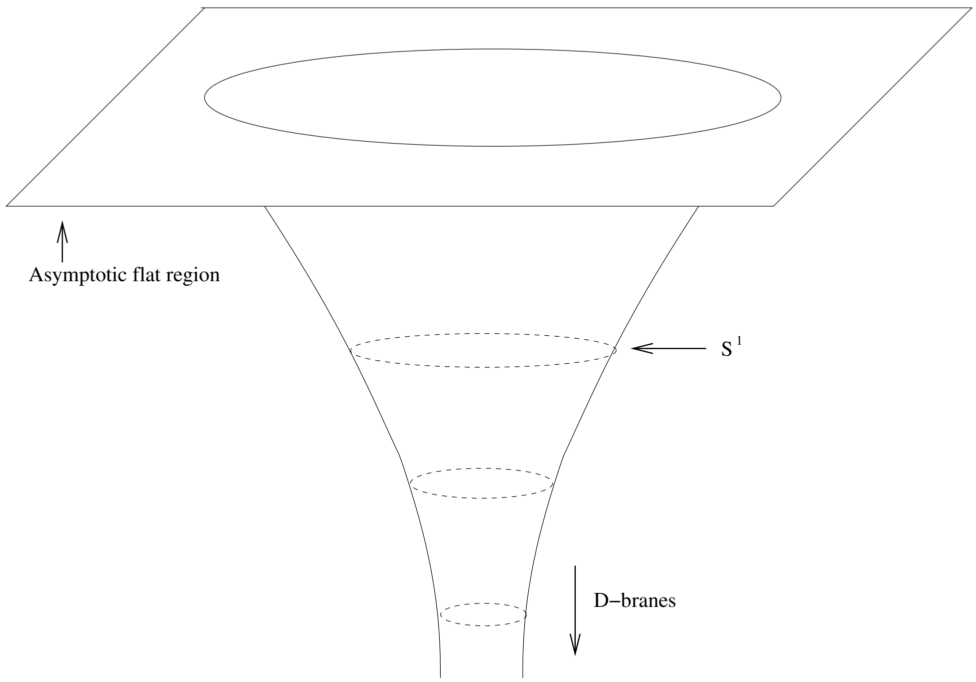
og $\sum_{i=1}^{6} \phi_i \phi_i$ er præcis normen der er invariant under en sådan transformation. Dette er ikke en rotationssymmetri i rumtiden selv (som jo er 4-dimensional), men i et "felt-rum" udspændt af de 6 ϕ_i. Dertil kommer at virkningen er invariant overfor Poincarétransformationer og 5 ekstra konforme (afstandsskalerende) transformationer som tilsammen danner den konforme gruppe.

For at opsummere er den bosoniske symmetrigruppe i $\mathcal{N} = 4$ SYM altså $SO(6) \times K(1,3)$, hvor $K(1,3)$ står for den konforme gruppe i 4-dimensionalt Minkowski rum. Man kan så spørge sig selv hvor mange *uafhængige* transformationer der udspænder denne gruppe eller med andre ord, hvor mange generatorer har gruppen? Hvis vi lidt mere generelt starter med $SO(N)$ kan man tælle hvor mange måder man kan føre en akse over i en anden i et N-dimensionalt rum. Der er N akser der kan føres til $N-1$ andre akser, men så har man talt alle transformationer dobbelt så antallet af generatorer er altså $\frac{N(N-1)}{2}$, hvilket man også hurtigt kan overbevise sig om ved at tælle de uafhængige elementer i en ortogonal matrix. $SO(6)$ har således 15 generatorer og det samme har $K(1,3)$ (3 boosts, 3 rotationer, 4 koordinat translationer og de 5 ekstra konforme transformationer).

3 AdS/CFT-korrespondencen

Betragter man nu en strengteori i fladt 10-dimensionalt Minkowski rum med åbne og lukkede strenge med N sammenfaldende D3-braner, kan man vise at de åbne og lukkede strenge ikke vekselvirker i lavenergigrænsen. Frihedsgraderne forbundet med de åbne strenge er givet ved $\mathcal{N} = 4$ SYM på branerne og frihedsgraderne forbundet med de lukkede strenge er givet ved en effektiv 10-dimensional feltteori (supergravity). Teorien er således delt op i to sektorer.

Vi kan nu også betragte tingene fra et andet synspunkt. Branerne er nemlig tunge objekter der ifølge Einsteins generelle relativitetsteori vil bøje rummet. Geometrien i krumme rum kan angives ved kvadratet på et infinitesimalt linjeelement ds^2 et vilkårligt sted i rummet. Dette er metrikken for rummet og for N D3-braner kan man vise at metrikken



Figur 3: En to-dimensional udgave af geometrien givet i (6). Fladen består af en stak en-dimensionale kugleskaller (S^1 = cirkel) med en radius der går asymptotisk mod R langt nede i halsen og mod uendelig i den anden retning. I det ti-dimensionale tilfælde erstattes cirklerne med fem-kugleskaller der omslutter det fire-dimensionale Minkowski-rum udspændt af t, x_1, x_2, x_3.

bliver

$$ds^2 = \Big(1 + \frac{R^4}{u^4}\Big)^{-\frac{1}{2}}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \Big(1 + \frac{R^4}{u^4}\Big)^{\frac{1}{2}}(du^2 + u^2 d\Omega_5^2), \tag{6}$$

hvor

$$R^4 = 4\pi g_s {\alpha'}^2 N, \tag{7}$$

t, x_1, x_2, x_3 er koordinaterne på branerne, u er en slags "radiel" koordinat og $u^2 d\Omega_5^2$ er metrikken af en 5-dimensional kugleskal (S^5) med radius u. Det er ikke overraskende at den 5-dimensionale kugleskal optræder her da der jo netop er sfærisk symmetri i det 6-dimensionale rum der står transversalt på branerne. Geometrien (6) har en horisont for enden af en uendelig "hals" som illustreret i figur 3.

I grænsen hvor $u \gg R$ er man langt fra branerne og rummet bliver asymptotisk fladt som forventet. Hvis man derimod betragter grænsen $u \ll R$ fås metrikken

$$ds^2 = \frac{u^2}{R^2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + R^2\Big(\frac{du^2}{u^2} + d\Omega_5^2\Big), \tag{8}$$

hvilket er metrikken for $AdS_5 \times S^5$ som det vil blive demonstreret i næste afsnit.

Hvis man nu forestiller sig at sidde i den asymptotisk flade del af rummet, altså langt fra branerne hvor $u \to \infty$, vil observationer af energien af tilstande i den krumme del af rummet være rødskiftet. Ifølge den generelle relativitetsteori vil man have at

$$E_\infty = \Big(1 + \frac{R^4}{u^4}\Big)^{-\frac{1}{4}} E_u, \tag{9}$$

og en observatør langt fra branerne vil altså opfatte energien af alle excitationer tæt på branerne ($u \ll R$) som små. For denne observatør vil lavenergigrænsen af strengteori i geometrien (6) altså igen splittes op i to sektorer: Den egentlige lavenergisektor i den asymptotisk flade del af rummet (supergravity) og den fulde teori tæt på branerne.

Der er altså nu fremsat to forskellige anskuelser af lavenergigrænsen af strengteri med N sammenfaldende D3-braner. I begge tilfælde splittes teorien op i to dele hvoraf den ene i de to anskuelser er supergravity i 10-dimensionalt fladt Minkowski-rum. Det er nu nærliggende at fremsætte hypotesen at de to andre sektorer også må være ækvivalente og det er den berømte "Maldacena Conjecture": Strengteori i $AdS_5 \times S^5$ er ækvivalent med $\mathcal{N} = 4$ SYM i fire-dimensionalt Minkowski-rum [1].

Kernen i denne dualitet er forholdet mellem anti-de Sitter-rum (AdS) og konform feltteori (CFT) og bliver derfor kaldt AdS/CFT-korrespondencen. Maldacenas postulat er det bedst undersøgte tilfælde, men dualiteten kan udvides til andre konforme feltteorier og tilsvarende strengteorier i andre ti-dimensionale rum der indeholder en anti-de Sitter del.

4 Minkowski som overfladen af Anti-de Sitter

AdS/CFT-korrespondencen realiserer en gammel mistanke om eksistensen af en holografisk beskrivelse af tyngdekraften. Det betyder at en teori for tyngdekraften i et givent rum er fuldstændig bestemt af teorien der lever på overfladen af rummet. Dette er til dels inspireret af sorte huller hvor entropien kan vises at være proportional med overfladearealet i stedet for volumen som man normalt ville forvente. Ideen er ikke helt så abstrakt som den måske lyder. Hvis man for eksempel betragter Laplaceligningen $\nabla^2\phi = 0$ (ϕ kunne for eksempel det elektrostatiske potential) er løsningen i et givent rum unikt bestemt når man har givet ϕ_0 på overfladen af dette rum. Holografi og tyngdekraften er selvfølgelig noget mere kompliceret da det nu er en komplet teori der er bestemt af teorien på overfladen. Strengteori indeholder kvantegravitation og AdS/CFT-korrespondence giver en holografisk beskivelse af denne, da Minkowski-rummet hvor feltteorien lever, udgør overfladen af anti-de Sitter-rummet [3] (se [4] for et detaljeret review). Da hverken Minkowski eller Anti de Sitter er kompakte skal dette forstås i en særlig (men præcis!) forstand som nu vil blive forklaret.

Minkowski-rum

For at analysere den globale struktur af Minkowski-rum er det smart at vælge et sæt koordinater givet i et endeligt interval. Som eksempel kan man tage to-dimensionalt Minkowski-rum. Metrikken er her

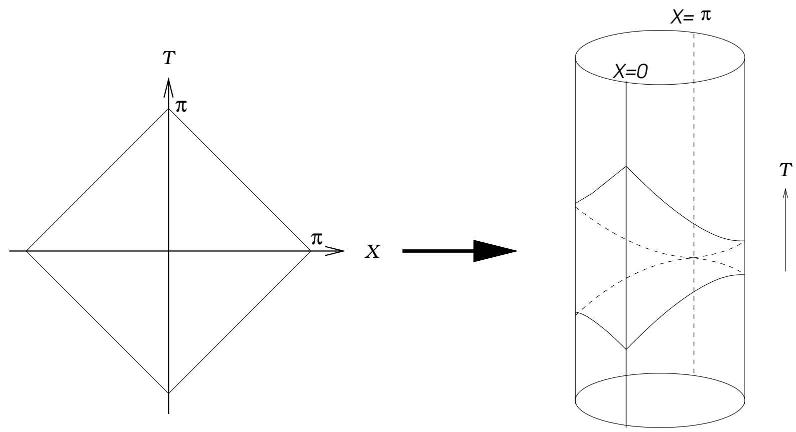
$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \tag{10}$$

med $-\infty < t, x < \infty$. Det viser sig at være smart at skifte til koordinaterne

$$T = \arctan(t + x) + \arctan(t - x), \tag{11}$$
$$X = \arctan(t + x) - \arctan(t - x), \tag{12}$$

hvor nu

$$-\pi < X < \pi, \quad |T| < \pi \pm X. \tag{13}$$



Figur 4: Den konforme kompaktifisering af to-dimensionalt Minkowski-rum kan indlejres på overfladen af en cylinder. Udvides T's interval til hele $\mathbb{R}$ fås det universale dække af det konformt kompaktificerede Minkowski-rum.

Metrikken bliver da

$$ds^2 = \frac{1}{(\cos X + \cos T)^2}\Big[-dT^2 + dX^2\Big] \equiv \omega^{-2}(T,X)\widetilde{ds^2}, \qquad (14)$$

hvor den reskalerede metrik $\widetilde{ds^2}$ er defineret som udtrykket i de firkantede klammer og $\omega(T,X) = \cos X + \cos T$. I en konform feltteori kan man altid reskalere metrikken og vi kan ligeså godt bruge $\widetilde{ds^2}$ som ds^2. Det smarte ved dette valg af koordinater er at hele Minkowski-rummet nu kan afbildes som et kvadrat uden sider. Kvadratets sider svarer til at de oprindelige koordinater går mod uendelig og vi kan nu arbejde med det kompakte rum bestående af kvadratet *inklusiv* sider hvilket kaldes konformt kompaktifiseret Minkowski-rum.

Identificeres punkterne $X = \pi$ og $X = -\pi$ i dette rum kan det indlejres på overfladen af en enheds-cylinder. Udvides den tidsagtige koordinat dernæst sådan at $-\infty < T < \infty$, bliver rummet identisk med cylinderfladen som illustreret i figur 4.

Cylinderfladen er topologisk $\mathbb{R} \times S^1$ da det kan konstrueres ved at tage $\mathbb{R}$ og knytte en S^1 (cirkel) til alle punkter. I fire-dimesionalt Minkowski-rum kan man lave samme konstruktion ved at skrive metrikken i sfæriske koordinater og lade den radielle koordinat spille rollen som X. Man får da at den konforme kompaktifisering af fire-dimensionalt Minkowski-rum er $\mathbb{R} \times S^3$, hvor S^3 er den tre-dimensionale kugleskal.

Anti-de Sitter-rum

Det fem-dimensionale Anti-de Sitter rum kan nemmest defineres som hyperboloiden

$$-X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = -R^2, \tag{15}$$

i et seks-dimensionalt pseudo-euklidisk rum. Gruppen af transformationer der lader denne form invariant kaldes $SO(2,4)$ og det ses at denne gruppe indeholder den fire-dimensionale Lorenzgruppe $SO(1,3)$.

Til at starte med betragtes parametriseringen:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{R^2}{2u}\Big(1 + \frac{u^2}{R^2} + u^2\frac{\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}{R^4}\Big), & X_1 &= \frac{u}{R}x_1, \\ X_2 &= \frac{u}{R}x_2, & X_3 &= \frac{u}{R}x_3, \\ X_4 &= \frac{R^2}{2u}\Big(1 - \frac{u^2}{R^2} + u^2\frac{\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}{R^4}\Big), & X_5 &= \frac{u}{R}t, \end{aligned} \tag{16}$$

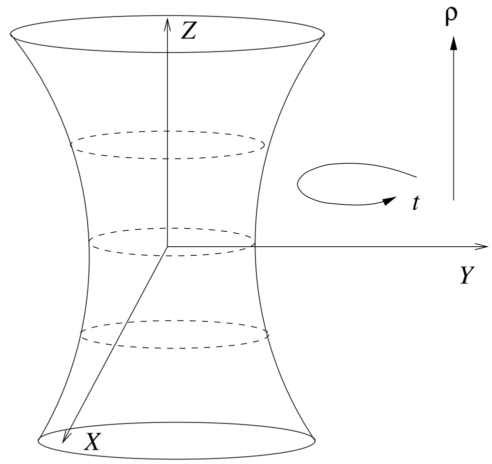
med $u > 0$, $x_\mu \in \mathbb{R}$ og $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = -t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Man kan hurtigt tjekke at dette løser (15), og at metrikken bliver

$$ds^2 = \frac{u^2}{R^2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + R^2\frac{du^2}{u^2}. \tag{17}$$

Dette var præcis metrikken nær branerne i (8) og i denne form er Poincaré symmetrien i t, x_1, x_2, x_3 manifest.

For at konstruere en konform kompaktifisering af AdS_5 bruges parametriseringen

$$X_0 = R\cosh\rho\cos t, \tag{18}$$
$$X_1 = R\sinh\rho\cos\psi\sin\vartheta_1, \tag{19}$$
$$X_2 = R\sinh\rho\cos\psi\cos\vartheta_1, \tag{20}$$
$$X_3 = R\sinh\rho\sin\psi\sin\vartheta_2, \tag{21}$$
$$X_4 = R\sinh\rho\sin\psi\cos\vartheta_2, \tag{22}$$
$$X_5 = R\cosh\rho\sin t, \tag{23}$$



Figur 5: To-dimensionalt anti-de Sitter (AdS_2) indlejret i 3-dimensionalt Minkowski-rum. Fladen er givet ved $X^2 + Y^2 - Z^2 = R^2$ og kan parametriseres med $X = R\cosh\rho\cos t$, $Y = R\cosh\rho\sin t$, $Z = R\sinh\rho$, hvilket giver anledning til tidsagtige lukkede kurver i XY-planen.

som også ses at løse (15). En to-dimensional udgave af anti-de Sitter-rum er vist i figur 5. Metrikken induceret fra denne parametrisering er

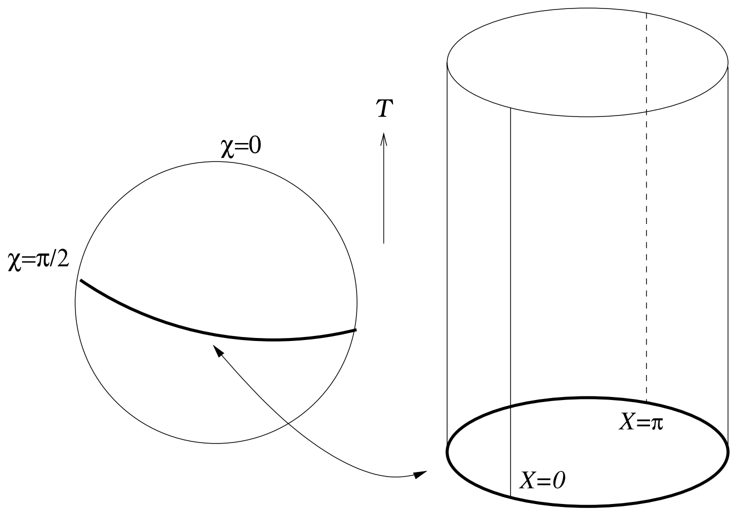
$$ds^2 = R^2(-\cosh^2\rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho d\Omega_3^2), \tag{24}$$

hvor $d\Omega_3$ er metrikken af tre-kugleskallen. Fra metrikken er det klart at t er en tidsagtig koordinat og fra parametriseringen fremgår det at den er periodisk med en periode på 2π. Denne underlige opførsel har kun at gøre måden vi definerede rummet som indlejret i et højere dimensionalt rum. Metrikken (24) kan tages som definerende for AdS_5 og man kan da tage $t \in \mathbb{R}$ hvilket kaldes det universelle dække af anti-de Sitter-rum.

Den konforme kompaktifisering opnås ved at indføre en ny koordinat χ, defineret ved $\tan\chi = \sinh\rho$ $(0 \leq \chi < \pi/2)$ med hvilken metrikken kan skrives

$$ds^2 = \frac{R^2}{\cos^2\chi}(-dt^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega_3^2) \equiv \frac{R^2}{\cos^2\chi}\widetilde{ds^2}. \tag{25}$$

Den konformt reskalerede metric $\widetilde{ds^2}$ beskriver geometrien $\mathbb{R} \times S^4$, men i modsætning til det konformt kompaktifiserede Minkowski-rum, er dette rum ikke dækket af koordinaterne. Kun halvdelen af S^4 er dækket da $0 \leq \chi < \pi/2$ i stedet for $0 \leq \chi < \pi$. Ved at tilføje "ækvator"$(\chi = \pi/2)$ af



Figur 6: Den rumlige del af konformt kompaktifiseret AdS_3 kan ses som den øvre halvdel af den to-dimensionale kugleskal, hvorimod det to-dimensionale kompaktifiserede Minkowski-rum kan afbildes som overfladen af en cylinder. På et givent tidspunkt er cylinderoverfladen en cirkel der kan identifiseres med kugleskallens "ækvator"og AdS_3 udgør altså det indre af cylinderen. I den konforme kompaktifisering af AdS_5 og fire-dimensionalt Minkowski-rum erstattes cirklerne der udgør cylinderen med tre-dimensionale kugleskaller.

denne halve S^4 fås den konforme kompaktifisering af AdS_5. Denne "ækvator"er præcis tre-kugleskallen så punkter "uendelig"langt væk i AdS_5 har derfor geometri som $\mathbb{R} \times S^3$. Med andre ord, overfladen af konformt kompaktifiseret AdS_5 er identisk med den konforme kompaktifisering af fire-dimensionalt Minkowski-rum. Denne identifisering er vist i figur 6 for AdS_3 og to-dimensionalt Minkowski-rum.

Symmetrier

Ligesom en teori i Minkowski-rum er Poincaréinvariant, må en teori i $AdS_5 \times S^5$ være invariant overfor transformationer der reflekterer dette rums symmetri. Hvis man betragter S^5 som en hyperflade i $\mathbb{R}^6$ er symmetritransformationerne netop de seks-dimensionale koordinattransformationer der lader fladen invariant og som tidligere nævnt udgør disse gruppen $SO(6)$. Det ses altså at $SO(6)$-symmetrien der i $\mathcal{N} = 4$ SYM var en symmetri mellem felterne ϕ_i, er en symmetri i rummet selv i strengteorien.

Da symmetrigruppen for AdS_5 er $SO(2,4)$ kan man nu spørge sig selv, hvad denne symmetri svarer til i feltteorien. Man kan omhyggeligt udarbejde hvordan denne gruppe virker på overfladen af AdS_5 (som jo var fire-dimensionalt Minkowski-rum) og resultatet er at de præcis genererer de konforme transformationer. Faktisk kan man vise at $SO(2,4)$ er isomorf med den konforme gruppe i fire-dimensionalt Minkowski-rum (der tidligere blev kaldt K(1,3)), og man kan da også hurtigt overbevise sig om at $SO(2,4)$ har 15 generatorer ligesom $K(1,3)$. Ud fra dette vil man altså netop forvente at det en konform feltteori der lever på overfladen af AdS_5.

Både AdS_5 og S^5 er med deres 15 isometrier begge maximalt symmetriske rum, hvilket vil sige at de har samme mængde af symmetri som et 5-dimensionalt euklidisk rum. Et sådant vil nemlig have 10 rotationsgeneratorer $(5(5-1)/2)$ og 5 translationsgeneratorer som i kvantemekanikken bliver til henholdsvis impulsmoment- og impulsoperatorer. I seks-dimensionalt euklidisk rum er der 15 rotationsgeneratorer som desuden udgør alle isometrigeneratorer på S^5. Af disse kan der vælges tre som kommuterer med hinanden, nemlig dem der genererer rotationer i de tre ortogonale planer (X_1X_2, X_3X_4 og X_5X_6-planerne). Strenge der bevæger sig på S^5 har altså et impulsmoment med 15 komponenter og kvantetilstandene er beskrevet ved tre kvantetal svarende til egenværdier for de kommuterende generatorer. I $\mathcal{N}=4$ SYM svarer sådanne strenge til felter sammensat af $SO(6)$-felterne ϕ_i. For eksempel vil en streng der bærer to enheder af impulsmoment i X_1X_2-planen og fire enheder af impulsmoment i X_5X_6-planen svare til et felt af formen $\mathcal{O}=(\phi_1+i\phi_2)^2(\phi_5+i\phi_6)^4$ og så videre. Operatorer der er sammensat af felterne $F_{\mu\nu}$ bærer Lorentz index og vil altså svarer til strenge der bevæger sig på AdS_5 med kvantetal fra $SO(2,4)$ (der jo indeholder Lorentzgruppen).

$U(N)$-gaugesymmetrien i $\mathcal{N}=4$ SYM sås at opstå ved valget af N D3-braner. Denne symmetri er ikke direkte til stede i strengteorien, men det ses fra (7) at N optræder i udtrykket for krumningsradius i $AdS_5\times S^5$. Beregninger er meget svært tilgængelige i både strengteorien og feltteorien, men kan simplifiseres markant ved at tage grænsen $N\to\infty, g_s\to 0$ sådan at R holdes konstant.

Til sidst skal det nævnes at gruppen $SO(2,4)\times SO(6)$ kun er den bosoniske del af den fulde symmetrigruppe for $\mathcal{N} = 4$ SYM. Som tidligere nævnt er teorien nemlig 4-fold supersymmetrisk, hvilket vil sige at den fulde virkning er invariant under 4 forskellige transformationer der udveksler fermioner og bosoner. Kombineres disse med den konforme gruppe fås supergruppen $PSU(2,2|4)$ som er den fulde symmetrigruppe i $\mathcal{N} = 4$ SYM. På den anden side kan man formulere en supersymmetrisk udgave af den generelle relativitetsteori og i 10 dimensioner vil $AdS_5 \times S^5$ dukke op som en slags supersymmetrisk "grundtilstand"der igen er invariant under supergruppen $PSU(2,2|4)$.

5 Og hvad så?

AdS/CFT-korrespondencen er stadigvæk ikke blevet bevist, men der er udført adskillige testberegninger i begge teorier som peger på at den holder og der er efterhånden ikke mange der tvivler på dens rigtighed. En af grundene til at den er så svær at vise er at man stadig ikke ved hvordan man skal formulere en kvanteteori for strenge på $AdS_5 \times S^5$. Man er derfor begrænset til klassiske beregninger som svarer til den utilgængelige stærkt koblede sektor af feltteorien ($R^2/\alpha' \gg 1$). Vælger man i stedet at tro på korrespondencen bliver dette nu en styrke da det betyder at beregninger der ellers ville være umulige i feltteorien kan udføres via klassisk strengteori.

I sidste ende vil man gerne finde en strengteori der svarer til QCD, men det har vist sig bestemt ikke at være ligetil. AdS/CFT-korrespondencen kan udvides til en ikke-supersymmetrisk feltteori, og en tilsvarende deformation af S^5 i strengteorien [5, 6, 7, 8], men den konforme invarians ser ud til at være sværere at slippe af med og der skal nok noget nytænkning til hvis man vil finde en eksakt streng/QCD dualitet.

Hvad angår spørgsmålet om strengteoriens natur går der nok noget tid inden (og hvis) der kommer en endegyldig redegørelse, men AdS/CFT-korrespondencen viser i hvert fald at strengteori på $AdS_5 \times S^5$ er en alternativ formulering af en særlig feltteori. I dette lys giver det nok ikke mening helt at ignorere strengteori hvis man accepterer en feltteoretisk beskrivelse af naturen. Selvom $\mathcal{N} = 4$ SYM langt fra beskriver den fysik vi kender i dag, giver korrespondencen fornyet motivation til at forfølge en strengteoretisk formulering af fysikken.

Litteratur

[1] J. M. Maldacena, "*The Large N Limit of Superconformal field theories and supergravity*", Adv. Theor. Math. Phys. **2** 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113], hep-th/9711200

[2] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "*Large N Field Theories, String Theory and Gravity*", Phys. Rep. **323** 183 (2000), hep-th/9905111.

[3] E. Witten, "*Anti-de Sitter space and Holography*", Adv. Theor. Math. Phys. **2** 253, (1998), hep-th/9802150.

[4] J. L. Petersen "*Introduction to the Maldacena Conjecture on AdS/CFT*", Int. J. Mod. Phys. A **14** 3597 (1999), hep-th/9902131

[5] R. G. Leigh and M. J. Strassler, "*Exactly Marginal Operators and Duality in Four Dimensional N=1 Supersymmetric Gauge Theory*", Nucl. Phys. B **447** 95 (1995) hep-th/9503121

[6] O. Lunin and J. Maldacena, "*Deforming field theories with $U(1) \times U(1)$ global symmetry and their gravity duals*", JHEP **0505** 033 (2005), hep-th/0502086.

[7] S. Frolov, "*Lax Pair for Strings in Lunin-Maldacena Background*", JHEP **0505** 069 (2005), hep-th/0503201

[8] T. Olsen, "*Spinning Strings in Lunin-Maldacena Background and Their Gauge Theory Duals*", www.fys.ku.dk/~tolsen/spinning.pdf